

Note :-

1. Part 'A' may be attempted in first 6 pages of Answer Sheet.
भाग क' के सभी उत्तर, उत्तर-मुस्तिका के प्रथम छः पृष्ठों में ही करने हैं।
2. Part 'B' in rest of Sheets of Answer Sheet.
भाग ख' के उत्तर, उत्तर-मुस्तिका के अगले शेष पृष्ठों में लिखिये।
3. Answers may be given in English or Hindi.
प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी अथवा हिन्दी में दीजिये।

Part 'A'

भाग क'

- 1 Answer any ten parts. Each part can be answered in either one word or one sentence or as per requirement of the question :-
10×2=20

किन्हीं 10 भागों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक भाग का उत्तर या तो एक शब्द या एक वाक्य या प्रश्न की आवश्यकतानुसार दीजिए :-

(a) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(x-1)}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(x-1)}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(b) If $x < 0$, find $\frac{d}{dx} (e^{x^k})$.

$\frac{d}{dx} (e^{x^k})$ को $x < 0$ के लिए ज्ञात कीजिये।

(c) If $x=a(\theta-\sin \theta)$, $y=a(1-\cos \theta)$, find $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$

$x=a(\theta-\sin \theta)$, $y=a(1-\cos \theta)$ के लिए $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$ को ज्ञात कीजिये।

(d) Find $\frac{d}{dx} (\log_x^3)$.

$\frac{d}{dx} (\log_x^3)$ को ज्ञात कीजिये।

(e) If the tangent to the curve $y=x^3+ax+b$ at $(1, -6)$ is parallel to the line $x-y+5=0$, find a.

वक्र $y=x^3+ax+b$ पर $(1, -6)$ पर स्पर्श रेखा, रेखा $x-y+5=0$ के समान्तर है। a को ज्ञात कीजिये।

(f) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$.

$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

(g) Evaluate $\int \frac{(\log x)^n}{x} \, dx$.

$\int \frac{(\log x)^n}{x} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

(h) If $\int e^x \sec x (1 + \tan x) \, dx = e^x f(x) + c$, find $f(x)$.

$\int e^x \sec x (1 + \tan x) \, dx = e^x f(x) + c$ के लिए $f(x)$ ज्ञात कीजिये।

(i) If $\int_0^{\pi} 3x^2 \, dx = 8$, find real values of a.

$\int_0^{\pi} 3x^2 \, dx = 8$, तो a के वास्तविक मानों को ज्ञात कीजिये।

(j) Evaluate $\int_{-1}^0 x|x| \, dx$.

$\int_{-1}^0 x|x| \, dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

(k) If a and b are respectively the order and degree of the differential equation

$$x \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + x^3 = 0, \text{ find the value of } 3a-2b.$$

अबकल समीकरण $x \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + y \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + x^3 = 0$

का क्रम a तथा कोटि b है, तो $3a-2b$ का मान ज्ञात कीजिये।

(1) Write the integrating factor of the differential

$$\text{equation } x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3.$$

अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3$ के लिये समावकलन गुणक ज्ञात कीजिये।

(m) Solve the differential equation $xdy - ydx = 0$.

अवकल समीकरण $xdy - ydx = 0$ को हल कीजिये।

(n) If $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, find $f_x(1, 1) - f_y(1, 1)$.

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ के लिये $f_x(1, 1) - f_y(1, 1)$ को ज्ञात कीजिये।

2 Attempt any five parts :- $5 \times 4 = 20$

किरी पौच भागों को हल कीजिए :-

(a) Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})$ का मान ज्ञात कीजिये।

(b) If $y = \tan x$, prove that $y_2 = 2yy_1$, where y_1 and y_2 have their usual meanings.

$y = \tan x$ के लिए सिद्ध कीजिये $y_2 = 2yy_1$, जबकि y_1 व y_2 का सामान्य अर्थ है।

(c) Find all points of local maxima and minima and corresponding maximum and minimum

values of the function $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$.

फलन $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ के लिये स्थानीय अधिकतम एवं न्यूनतम और संगत उच्चतम व निम्नतम मानों के सभी बिन्दुओं को ज्ञात कीजिये।

(d) Evaluate $\int \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx$.

$\int \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

(e) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \log \tan x dx$.

$\int_0^{\pi/2} \log \tan x dx$ का मान ज्ञात कीजिये

(f) If $z(x+y) = x^2 + y^2$, show that :-

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$z(x+y) = x^2 + y^2$ के लिये सिद्ध कीजिये :-

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

(g) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^6 x dx$.

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^6 x dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

- (h) Find the mean value of $f(x)=\sin x$ over $[0, 2\pi]$.
 $f(x)=\sin x$ का माध्य (औसत) मान $[0, 2\pi]$ पर ज्ञात कीजिये।

Part 'B'

भाग 'ख'

Attempt any three questions :- $3 \times 20 = 60$
 किसी तीन प्रश्नों के उत्तर लिखिए :-

- 3 (a) Differentiate $\sin(x^2+1)$ from first principles.
 $\sin(x^2+1)$ का प्रथम सिद्धान्त अनुसार अवकलन कीजिये।
 (b) If $x^m y^n = (x+y)^{m+n}$, prove that :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$x^m y^n = (x+y)^{m+n}$ के लिए सिद्ध कीजिये :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

- 4 (a) Show that the line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ touches the curve $y = b e^{-x/a}$ at the point where it crosses the y-axis.

सिद्ध कीजिये कि वक्र $y = b e^{-x/a}$ को रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

उस बिन्दु पर स्पर्श करती है जहाँ वक्र, y-अक्ष को काटता है।

- (b) An open tank with a square base and vertical sides is to be constructed from a metal sheet so as to hold a given quantity of water. Show that the cost of material will be least when depth of the tank is half of its width.
 एक पातु चादर से वर्ग आधार एवं खड़े पार्श्वों का एक खुला टैंक बनाया गया है, जो जल के ज्ञात आयतन से भरा जा सके। सिद्ध कीजिये कि यदि टैंक में जल की गहराई उसकी चौड़ाई की आधी हो, तो पदार्थ की लागत न्यूनतम होगी।

- 5 (a) Find the area of the smaller region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and the line

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ व $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से घिरे छोटे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

- (b) A river 80 metres wide. The depth d (in metres) for the river at distance x from one bank is given by the following table :-
 80 मीटर चौड़ी नदी के लिये, एक तट से x दूरी पर नदी की गहराई d (मीटर में) नीचे तालिका में दी गई है :-

3K4-MBM-05

(8)

x : 0 10 20 30 40 50 60 70 80

d : 0 4 7 9 12 15 14 8 3

Using Simpson's one third rule find approximately the area of cross-section of the river.

सिमसन के एक-तिहाई नियम द्वारा नदी का लगभग काट-अनुच्छेद क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

6 (a) If $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$, prove that :-

सिद्ध कीजिये :-

$$(i) x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

$$(ii) x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tan^3 u$$

(b) Evaluate $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$.

$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

7 Solve the differential equations :-

अवकल समीकरणों को हल कीजिये :-

(a) $\frac{dy}{dx} - 2y = \cos 3x$

(b) $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$