

December – 2015

APPLIED MATHEMATICS-I

Time Allowed : 3 Hours Max. Marks : 100

- Note :**
1. 'Part-A' may be attempted in first 6 pages of Answer-sheet.
  2. 'Part-B' in rest of the sheets of Answer-sheet.
  3. The question paper consists of two parts, namely, Part-A & Part-B.
  4. A candidate has to attempt both parts.
  5. Part-A consists of two questions and Part-B consists of 5 questions.
  6. Answer may be given in Hindi or English language.

[Part - A]

1. Answer any 10 questions. 2×10 = 20

(i) If

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

find  $A + A^T$ .

(ii) If

$$\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

find the value of x.

(iii) If

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

find adj (AB).

(iv) Find the value of  $\lambda$  for which the vectors

$\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + 9\hat{k}$  and  $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  are perpendicular to each other.

(v) If  $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$  and  $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}$ , find a unit vector parallel to  $\vec{a} + \vec{b}$ .

(vi) Find the eccentricity of the hyperbola  $9x^2 - 16y^2 = 144$

(vii) If the latus-rectum of the parabola  $x^2 = -2py$  is of length 16 units, find the value of p.

(viii) Find the equation of the circle, the coordinates of the end point of whose diameter are  $(-1, 2)$  and  $(4, -3)$ .

(ix) A line passes through the points  $(a, 2a)$  and  $(-2, 3)$  and is perpendicular to the line  $4x + 3y + 5 = 0$ , find the value of a.

(x) If

$$\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin Ax \sin Bx,$$

find  $A + B$ .

(xi) Find the 4th term from the end of the G.P. 3, 6, 12, 24, .....3072.

(xii) Define a symmetric and a skew-symmetric matrix.

(xiii) Determine the values of 'a' for which the line

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

passes through the origin.

(xiv) Find the distance between the parallel lines

$$3x - 4y + 9 = 0 \text{ and } 6x - 8y - 15 = 0$$

2. Attempt any five parts :  $(\sqrt{e}, 0)$   $4 \times 5 = 20$

(i) Prove that

$$\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

(ii) Find the 11th term from the end in the expansion of

$$\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^{25}$$

(iii) Find the sum of the following series :  $7 + 77 + 777 + 7777 + \dots$  to n terms.



- (iv) Resolve

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}$$

into partial fractions.

- (v) If G is the centroid of the triangle ABC, show that

$$G\vec{A} + G\vec{B} + G\vec{C} = \vec{O}$$

- (vi) What are the points on x-axis whose perpendicular distance from the line
- $4x + 3y = 12$
- is 4 ?

- (vii) Find the equation of the hyperbola, referred to its principal axes as axes of coordinates, whose vertices are at
- $(0, \pm 7)$
- and eccentricity
- $e = \frac{4}{3}$
- .

- (viii) Find matrix x for which

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

## [Part-B]

Attempt any three questions. 20x3 = 60

3. (a) Show that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

satisfies the equation  $A^2 - 4A + 5I_3 = 0$  and hence find  $A^{-1}$ .

- (b) Show that

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$

4. (a) Show that the equation

$$3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$$

represents an ellipse. Find its centre, foci, eccentricity and the equation of its axes and directrices.

- (b) Find the area of the triangle whose vertices are

$$A(3, -1, 2) \quad B(1, -1, -3) \quad \text{and} \quad C(4, -3, 1)$$

5. (a) Find the equation of the parabola with vertex
- $(2, -3)$
- and focus
- $(0, 5)$
- .

- (b) Find the equation of the circumcircle of the triangle formed by the lines
- $x + y = 6$
- ,
- $2x + y = 4$
- and
- $x + 2y = 5$
- .

6. (a) In a triangle ABC, if
- $\cos A = b \cos B$
- , show that the triangle is either isosceles or right angled.

- (b) The angle of elevation of a cloud from a point 60m above a lake is  $30^\circ$  and the angle of depression of the reflection of cloud in the lake is  $60^\circ$ . Find the height of the cloud.
7. (a) Obtain the equations of the lines passing through the intersection of lines  $4x - 3y - 1 = 0$  and  $2x - 5y + 3 = 0$  are equally inclined to the axes.
- (b) If  $S_1$ ,  $S_2$  and  $S_3$  be respectively the sum of  $n$ ,  $2n$  and  $3n$  terms of a G.P., prove that
- $$S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$$

(हिन्दी रूपान्तरण)

नोट- 1. 'भाग-अ' के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका के पहले 6 पृष्ठों पर ही दें।

2. 'भाग-ब' के उत्तर, उत्तर पुस्तिका के बाकी पृष्ठों पर दें।
3. परीक्षार्थी को दोनों ही भाग करने हैं।
4. इस प्रश्न-पत्र के 2 भाग हैं, भाग (अ) एवं भाग (ब)।
5. भाग (अ) में 2 प्रश्न एवं भाग (ब) में 5 प्रश्न हैं।  
(भाग-अ)

1. दस प्रश्नों के उत्तर लिखिये।

(i)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A + A^T$  ज्ञात कीजिये।

(ii)  $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$x$  का मान ज्ञात कीजिये।

(iii)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

adj (AB) ज्ञात कीजिये।

(iv) सदिश  $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k}$  तथा  $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

परस्पर लम्बवत हैं, तो  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिये।



(v)  $\vec{a} = i + 2j - 3k$  तथा  $\vec{b} = 2i + 4j + 9k$ , तो सदिश  $\vec{a} + \vec{b}$  के समान्तर इकाई सदिश  $a$  को ज्ञात कीजिये।

(vi) अतिपरवलय

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिये।

(vii) परवलय

$$x^2 = -2py$$

के नाभि-लम्ब की लम्बाई 16 इकाई है, तो  $p$  का मान ज्ञात कीजिये।

(viii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके व्यास के सिरे के निर्देशांक

$(-1, 2)$  व  $(4, -3)$  हैं।

(ix) एक रेखा

$(a, 2a)$  व  $(-2, 3)$

से होकर जाती है तथा रेखा

$$4x + 3y + 5 = 0$$

पर लम्बवत् है।  $a$  का मान ज्ञात कीजिये।

(x)  $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin Ax \sin Bx$

तो  $A + B$  ज्ञात कीजिये।

(xi) गुंश्रे०

3, 6, 12, 24, ..... 3072

में अन्त की ओर से चौथा पद ज्ञात कीजिये।

(xii) सममित एवं वैषम्य समित भेदिकस को परिभाषित कीजिये।

(xiii) रेखा

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

निर्देशांक अक्षों के मूल बिन्दु से होकर जाये, तो  $a$  का मान ज्ञात कीजिये।

(xiv) समान्तर रेखाओं

$$3x - 4y + 9 = 0 \text{ एवं } 6x - 8y - 15 = 0$$

के बीच दूरी ज्ञात कीजिये।

2. पाँच प्रश्नों को हल कीजिये।

(i) सिद्ध कीजिये

$$\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

(ii)  $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^{25}$

के प्रसार में 11वाँ पद ज्ञात कीजिये।

(iii) श्रेणी

$$7 + 77 + 777 + 7777 + \dots \dots \dots n$$

पद का योग ज्ञात कीजिये।

(iv) भिन्न

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}$$

का आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिये।



(v) भिन्न ABC का केन्द्रक G है, तो सिद्ध कीजिये

$$G\vec{A} + G\vec{B} + G\vec{C} = \vec{O}$$

(vi) x-अक्ष पर वे कौन से बिन्दु हैं जिनकी, रेखा  $4x + 3y = 12$  से लम्बवत दूरी 4 है।

(vii) उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके मुख्य अक्ष, निर्देशांक अक्षों के रूप में हों तथा शीर्ष  $(0, \pm 7)$  पर तथा उत्केन्द्रता  $e = \frac{4}{3}$  है।

(viii)  $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$  में भेदिकस x को ज्ञात कीजिये।

(भाग-ब)

तीन प्रश्नों को उत्तर लिखिये।

3. (क) सिद्ध कीजिये कि भेदिकस

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{समीकरण } A^2 - 4A - 5I_3 = 0$$

को संतुष्ट करता है, तदनुसार  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिये।

(ख) सिद्ध कीजिये

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$

4. (क) सिद्ध कीजिये कि समीकरण

$$3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$$

एक दीर्घवृत्त व्यक्त करती है। इसका केन्द्र, नाभि,

उत्केन्द्रता तथा अक्षों व नियताओं के समीकरण ज्ञात कीजिये।

(ख)  $A(3, -1, 2)$   $B(1, -1, -3)$  तथा  $C(4, -3, 1)$

शीर्षों के त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

5. (क) शीर्ष  $(2, -3)$  तथा नाभि  $(0, 5)$  के परवलय की

समीकरण ज्ञात कीजिये।

(ख) रेखाओं

$$x + y = 6, 2x + y = 4 \text{ व } x + 2y = 5$$

से बने त्रिभुज के शीर्षों से जाने वाले वृत्त का

समीकरण ज्ञात कीजिये।

6. (क) त्रिभुज ABC में,  $a \cos A = b \cos B$  है, तो सिद्ध

कीजिये कि त्रिभुज या तो समद्विबाहु या समकोण त्रिभुज है।

(ख) एक झील के ऊपर 60 मीटर पर स्थित बिन्दु से

बादल का उन्नयन कोण  $30^\circ$  तथा झील में बादल के परावर्तित बिम्ब का अवनमन कोण  $60^\circ$  है।

बादल की ऊँचाई ज्ञात कीजिये।

3K-ASN2A

(12)

12.00

7. (क) रेखाओं

$$4x - 3y - 1 = 0 \text{ तथा } 2x - 5y + 3 = 0$$

से कटान-बिन्दु से जाने वाली रेखाओं के समीकरण

ज्ञात कीजिये जो अक्षों पर समान रूप से अवनत

हैं।

(ख) एक गुंथेण के  $n, 2n$  तथा  $3n$  पदों के योग क्रमशः

$S_1, S_2$  व  $S_3$  है, तो सिद्ध कीजिये

$$S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$$

(ख)

एक लघु लघु निरूपण है। निरूपण के लघुपत्तियों के  
द्वितीय क्रम के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिये कि  
यदि  $A, B, C$  एक त्रिकोण के कोणों के लघुपत्तियों के  
समीकरण  $A^2 + B^2 + C^2 = 4A^2B^2C^2$  को संतुष्ट करते हैं, तो  $A, B, C$  एक त्रिकोण के कोणों के लघुपत्तियों के समीकरण हैं।

(ख)

1. द्वितीय क्रम के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिये कि

यदि  $A, B, C$  एक त्रिकोण के कोणों के लघुपत्तियों के समीकरण  $A^2 + B^2 + C^2 = 4A^2B^2C^2$  को संतुष्ट करते हैं, तो  $A, B, C$  एक त्रिकोण के कोणों के लघुपत्तियों के समीकरण हैं।